

Propiedades de la materia

Equilibrio termodinámico y temporal

- Estrictamente las estrellas no son sistemas en equilibrio termodinámico exacto.
 - Tomamos el ejemplo del Sol. En el centro, la temperatura es del orden de 10^7 K mientras que es del orden de 10^4 K en la superficie. Claramente, hay un gradiente de temperatura en su interior
 - Por otra parte, este gradiente es pequeño. En promedio el gradiente en temperatura es de
$$\frac{\Delta T}{R} = \frac{10^7}{7 \times 10^{10}} \approx 10^{-4} \text{ K/cm} .$$
 - Dado que además los procesos microscópicos de transferencia de radiación ocurren sobre escalas más pequeños, la aproximación de equilibrio es bastante buena.
- De la misma manera, las estrellas no son exactamente estáticas, sino que cambian en función del tiempo.
 - El ejemplo más obvio del cambio temporal es el núcleo, donde la composición química cambia continuamente debido a la generación de energía.
 - También, en zonas de convección, la composición química o el estado de ionización puede cambiar, dependiendo de los cambios en las condiciones ambientales.
 - Por otra parte, la mayoría de las estrellas son constantes en sus propiedades macroscópicas, como su luminosidad o radio, sobre escalas de tiempo largas.
 - Igualmente, las escalas de tiempo para procesos microscópicos, como es la ionización, son frecuentemente del orden de 10^{-8} s. Sobre estas escalas, entonces, las condiciones ambientales son estáticas a buena precisión.
- Entonces, la cuestión de equilibrio termodinámico y configuraciones estáticas son aproximaciones prácticas útiles.

El gas ideal

- En un plasma a alta temperatura y baja densidad, hay poca interacción entre las partículas, así que la presión (P), temperatura (T) y densidad (ρ) se relacionan por la ley para gases ideales

$$P = \frac{N}{V} kT = nkT = \frac{\rho kT}{\mu m_H} ,$$

donde V es el volumen, N el número de partículas en este volumen, n el número de partículas por cm^3 , k la constante de Boltzmann, μ la masa molecular promedio y m_H la masa del átomo de hidrógeno.

- Para un gas ideal, la energía interna, U , se relaciona con la capacidad de calor a volumen constante, c_V , como

$$U = \int_0^T c_V dT$$

y la capacidad de calor a volumen constante está definida como

$$c_v = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_V = \left(\frac{\partial Q}{\partial T} \right)_V ,$$

donde la última forma viene de la primera ley de la termodinámica,
 $dU = dQ - PdV$,

siendo Q el calor invertido al sistema, P la presión y V el volumen.

- El calor Q está relacionado con la entropía, S , vía
 $dQ = TdS$.
- En un gas ideal, la capacidad de calor a volumen constante es generalmente función de la temperatura, $c_v = c_v(T)$.

- En el caso particular de un gas ideal monoatómica y no relativista,

$$c_v = \frac{3}{2} Nk \quad \text{y} \quad U = c_v T .$$

- El calor específico es la capacidad de calor a volumen constante por gramo del material.
- A través la primera ley de la termodinámica, podemos las capacidades de calor a volumen constante y a presión constante, c_p , definido por

$$c_p = \left(\frac{\partial Q}{\partial T} \right)_P .$$

Recordando que $dU = c_v(T)dT$, obtenemos

$$c_p = \left(\frac{\partial Q}{\partial T} \right)_P = c_v + P \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P = c_v + Nk ,$$

así que generalmente c_p también será función de la temperatura.

- Definiremos procesos politrópicos donde

$$\frac{dQ}{dT} = c = \text{constante} .$$

- Se puede demostrar, usando la primera ley de la termodinámica, la ley para gases ideales y la relación entre c_v y c_p ,

$$cdT - c_v dT = PdV = (c_p - c_v)T \frac{dV}{V}$$

y se puede definir un índice politrópico, γ ,

$$\gamma = \frac{c_p - c}{c_v - c}$$

que nos permite derivar

$$\frac{dT}{T} + (\gamma - 1) \frac{dV}{V} = 0 .$$

- Si γ es constante, la ley para gases ideal nos permite obtener

$$PV^\gamma = \text{constante}$$

$$P^{1-\gamma} T^\gamma = \text{constante}$$

$$TV^{\gamma-1} = \text{constante}$$

Estas ecuaciones de estado politrópicos son muy útiles para entender la estructura de estrellas homogéneas, enanas blancas y estrellas de neutrones.

- Más generalmente,
 $PV^{\Gamma_1} = \text{constante}$
 $P^{1-\Gamma_2} T^{\Gamma_2} = \text{constante}$
 $TV^{\Gamma_3-1} = \text{constante}$
 para gases arbitrarias, como son los con moléculas o a temperaturas donde se pueden excitar transiciones en electrones ligadas. En estos casos, los Γ_i no son iguales.
- La entropía se obtiene de la ecuación de estado y la primera ley de la termodinámica $TdS = dU + PdV$, de lo cual derivamos, aprovechando la definición de γ ,
 $S = Nk \ln(VT^{\gamma/(\gamma-1)}) + \text{constante}$.

- Las partículas en un gas ideal tienen una distribución de velocidades, v , dada por la distribución de Maxwell (distribución maxwelliana)

$$f(v) = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) v^2,$$

donde m es la masa de la partícula, k la constante de Boltzmann y T la temperatura. La cantidad $f(v)dv$ es la probabilidad de encontrar una partícula con velocidades entre v y $v + dv$. La distribución maxwelliana es normalizada

$$\int_0^{\infty} f(v)dv = 1.$$

La velocidad más probable para una partícula de masa m es

$$\sqrt{\frac{2kT}{m}}.$$

La masa molecular promedia

- Cuando un sistema contiene una mezcla de gases ideales, cada uno obedece su propia ley para gases ideales,
 $P_i = n_i kT$,
 donde P_i es la presión parcial del gas i con densidad n_i .

- La presión total en este caso es

$$P = \sum_i P_i = \sum_i n_i kT$$

y la suma se hace sobre todos los gases presentes. Como ejemplo, en un plasma, cada especie de ión representa un gas ideal y la suma sería sobre todos los especies de iones presentes.

- Es usualmente más conveniente calcular la presión total considerando la densidad

$$P = \sum_i \frac{\bar{n}_i}{m_i} \rho kT = \frac{\rho kT}{\mu m_H},$$

donde m_i es la masa del especie y \bar{n}_i es su abundancia por masa, ρ es la densidad total, k la constante de Boltzmann, T la temperatura, m_H la masa del átomo de hidrógeno y μ la masa molecular promedia.

- Lo anterior define la masa molecular promedio

$$\mu^{-1} = \sum_i \bar{n}_i \frac{m_H}{m_i} .$$

- Dado que la distribución de estados de ionización puede depender de la densidad y temperatura, la masa molecular promedio también es sensible a estas variables.
- Si indicamos los números atómicos y masas de los elementos con Z y A , respectivamente, y las masas fraccionales X_A , en un gas totalmente ionizado $\bar{n}_i = (Z + 1)X_A$

$$m_i = Am_H$$

y, si suponemos que $A = 2Z$ para los elementos más pesados que el helio,

$$\mu^{-1} = \sum_A \frac{Z+1}{A} X_A = 2X + \frac{3}{4}Y + \frac{1}{2}Z$$

donde X , Y y Z representan las masas fraccionales de hidrógeno, helio, y elementos más pesados, respectivamente. Naturalmente, es necesario que

$$X + Y + Z = 1 = \sum_A X_A .$$

- En el caso del Sol,
 $X = 0.739$

$$Y = 0.249 \quad \text{de lo cual calculamos} \quad \mu^{-1} = 1.671 .$$

$$Z = 0.012$$

La radiación y la materia

- La densidad de energía (por volumen) en un “gas” de fotones es

$$u_R = \frac{U_R}{V} = aT^4 .$$

- La presión que ejerce esta radiación es

$$P_R = \frac{1}{3} aT^4 .$$

- La presión y energía interna total serán entonces

$$P = P_R + P_g = nkT + \frac{1}{3} aT^4 \quad \text{y} \quad U = uV = c_v T + aT^4 V .$$

- El espectro de la radiación en equilibrio térmico a una temperatura T es dada por la formula de Planck, la energía entre frecuencias ν y $\nu + d\nu$ siendo

$$u(\nu, T) d\nu = \frac{8\pi h \nu^3}{c^3} \frac{d\nu}{e^{h\nu/kT} - 1}$$

donde ν es la frecuencia, y h y k los constantes de Planck y Boltzman, respectivamente. Naturalmente,

$$u(T) = \int_0^{\infty} u(\nu, T) d\nu = aT^4 .$$

- La energía de un fotón es $E = h\nu$ y su longitud de onda $\lambda = c/\nu$.