Estructura estelar estática

Introducción

A lo largo de su existencia, una estrella se encuentra en un estado de equilibrio delicado. Pequeños cambios pueden provocar inestabilidades locales o globales.

Aunque sus propiedades macroscópicas como son la luminosidad o su radio sean aproximadamente constantes, las estrellas están en un estado de cambio continuo. En general, estos cambio son irreversibles y son el origen de la evolución de las estrellas.

Dada esta situación, en principio, la estructura de una estrella depende de su evolución. No obstante, durante una gran parte de la vida de una estrella, los cambios son muy lentos y se puede aproximar su evolución como estática.

En general, un elemento de fluido tiene un comportamiento descrito por la ecuación de movimiento hidrodinámico para un sistema esféricamente simétrico

$$\rho \frac{d^2 r}{dt^2} = -\frac{m(r)G}{r^2}\rho - \frac{\partial P}{\partial r} \qquad (1)$$

donde ρ es la densidad, r el radio, m la masa dentro del radio r y P la presión total.

El sistema se encuentra en un estado de equilibrio estático si

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = 0 \, ,$$

lo cual implica

$$\frac{\partial P}{\partial r} = -\frac{m(r)G}{r^2}\rho \, . \qquad (2)$$

Se deben cumplir dos condiciones para adoptar la aproximación de equilibrio estático. Primero, si domina la gravedad, la escala de tiempo asociado a la ecuación (1) es la escala de caída libre

$$t_{ff} \sim \sqrt{\frac{R^3}{MG}} \, .$$

Segundo, cuando domina la presión, la ecuación (1) se aproxima a

$$\left(\frac{r}{t}\right)^2 \sim \frac{P}{\rho} \, . \qquad (3)$$

Dimensionalmente, esta cantidad tiene las unidades de una velocidad cuadrada. Si recordemos que la velocidad del sonido es

$$c_s = \frac{\partial P}{\partial \rho} \, ,$$

vemos que la ecuación (3) implica una velocidad del orden de la velocidad del sonido. Entonces, si la escala de tiempo evolutivo, t_e, excede la escala de caída libre, $t_{evol} \gg t_{ff}$, y si las velocidades son mucho menores que la velocidad del sonido, $v \ll c_s$, la aproximación del equilibrio estático es válida.

En la práctica, se puede suponer que las condiciones sobre velocidades y escalas de tiempo son válidas, calcular el modelo y luego revisar la validez de la suposición.

Las ecuaciones de la estructura estelar

La estructura estelar consta de un sistema de cuatro ecuaciones diferenciales acoplados de primer orden que describen (presento los variables a medida que aparecen)

equilibrio hidrostático (presión P, masa m, densidad ρ, radio r y contante de gravitación G)

$$\frac{\partial P}{\partial r} = -\frac{m(r)G}{r^2}\rho(r)$$

equilibrio térmico (temperatura T, opacidad $\bar{\kappa}$, luminosidad L, constante de radiación a, velocidad de la luz c y $\gamma = c_P/c_T$ es el cociente de las capacidades de calor a presión y temperatura constante)

$$\frac{dT}{dr} = -\frac{3\bar{\kappa}\rho(r)L(r)}{16\pi acr^2T(r)^3} \quad \text{o} \quad \frac{dT}{dr} = -\left(1-\frac{1}{\gamma}\right)\frac{T(r)}{P(r)}\frac{dP}{dr}$$

conservación de masa

$$\frac{dm}{dr} = 4\pi r^2\rho(r)$$

conservación de energía (tasa de generación de energía nuclear ε)

$$\frac{dL}{dr} = 4\pi r^2\rho(r)\varepsilon(r)$$

Todos son ecuaciones locales, es decir que son funciones de variables locales y no globales (presión, temperatura, luminosidad y masa en función del radio).

Todos son funciones del radio desde el centro de la estrella.

Adicionalmente, se requieren descripciones (ecuaciones) relacionando la densidad, opacidad y generación de energía a las condiciones de presión, temperatura y composición química (X, Y, Z).

ecuación de estado	$P(r) = f(\rho, T, X, Y, Z)$
opacidad	$\bar{\kappa}(r) = f(\rho, T, X, Y, Z)$
generación de energía	$\varepsilon(r) = f(\rho, T, X, Y, Z)$

Para su solución estas ecuaciones requieren de cuatro condiciones de frontera, que usualmente son

falta de singularidad en masa y energía en el centro de la estrella

$$\text{en } r = 0, \quad m(0) = 0 \quad \text{y} \quad \varepsilon(0) = 0$$

la temperatura y presión en la superficie de la estrella, $r = R$

$$\text{en } r = R, \quad T(R) = T_{atm} \quad \text{y} \quad P(R) = P_{atm}$$

Además, se imponen condiciones iniciales, usualmente la masa total, M, y la composición química (X, Y, Z).

La ecuación de equilibrio hidrostático

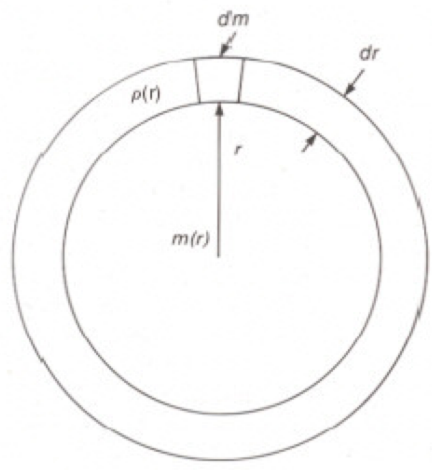

Figure 4.1. Mass shell in a spherically symmetric star. In hydrostatic equilibrium, the pressure inside *r* balances the gravitational force on *dm* due to the mass *m*(*r*).

En el interior de las estrellas: Derivación #1

Suponemos una estrella esférica.

Consideramos una cáscara de radio *r*, espesor *dr* y densidad *ρ*. La fuerza gravitatoria sobre esta cáscara es

$$\frac{m(r)G}{r^2}4\pi r^2\rho(r)dr\ ,$$

donde $m(r)$ es la masa interior a *r*,

$$m(r) = \int_0^r 4\pi \acute{r}^2\, d\acute{r}\ .$$

La presión soportando esta cáscara es

$$4\pi r^2 dP\ ,$$

donde *dP* es la diferencia de presión a través la cáscara.

Suponiendo el equilibrio estático (igualar estas dos fuerzas), obtenemos la ecuación de equilibrio hidrodinámico

$$\frac{\partial P}{\partial r} = -\frac{m(r)G}{r^2}\rho(r)\ , \qquad (4)$$

donde el signo negativo indica que la presión baja mientras crece el radio. Para solucionar esta ecuación, se requiere una condición de frontera, que usualmente es la presión atmosférica en el borde exterior de la estrella (que puede aproximarse como cero).

Podemos derivar un límite a la presión central, P_c, si partimos de la ecuación de la conservación de masa,

$$\frac{dm}{dr} = 4\pi r^2\rho(r) \qquad (5)$$

y dividimos la ecuación (4) por la (5)

$$\frac{\partial P}{\partial m} = -\frac{m(r)G}{4\pi r(m)^4} \qquad (6)$$

donde ahora expresamos *r* como función de la masa interior a ese punto. Esto tiene la ventaja de que la masa total, *M*, al radio total, *R*, se usualmente fija y conocida, mientras que el radio total es un variable a determinar.

Si ahora consideramos el derivado con respecto a *r* de la cantidad

$$P + \frac{m(r)^2 G}{8\pi r^4}$$

que es

$$\frac{d}{dr}\left(P + \frac{m(r)^2 G}{8\pi r^4}\right) = \frac{dP}{dr} + \frac{m(r)G}{4\pi r^4}\frac{dm}{dr} - \frac{m(r)^2 G}{2\pi r^5} = -\frac{m(r)^2 G}{2\pi r^5} \qquad (7)$$

dado que los dos primeros términos cancelan en equilibrio hidrostático. Por lo tanto, el derivado de la cantidad (7) es negativo. Dado que, en el centro

$$\frac{m(r)}{r^4} \to 0 \quad \text{y} \quad P \to P_c$$

mientras que $P = 0$ en la superficie ($r = R$), obtenemos

$$P_c > \frac{M^2 G}{8\pi R^4}\,.$$

La atmósfera: Derivación #2

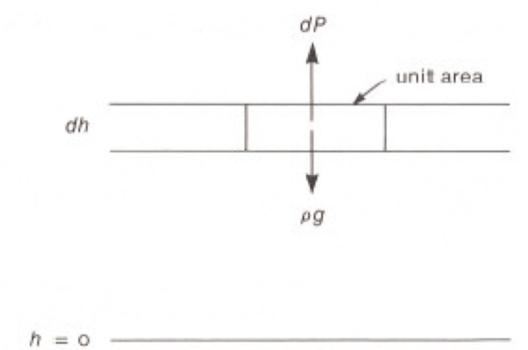

Figure 4.2. Coordinates in planar approximation to a stellar atmosphere; an arbitrary reference level is denoted by $h = 0$. The stellar surface gravity is g.

Ahora, consideramos las capas más exteriores de la estrella, su atmósfera.

Dado que la atmósfera es muy delgada, el radio casi no cambia y podemos usar el radio de la estrella, ($r = R$).

Esto implica que la fuerza de la gravedad, g, es aproximadamente constante también,

$$g = \frac{MG}{R^2}\,.$$

Luego, dado que el espesor de la atmósfera es mucho más pequeño que el radio de la estrella, podemos considerar la geometría de la atmósfera como plano paralelo.

Si entonces consideramos las distancias, *h*, con respecto a alguna altura, *h* = 0, podemos escribir la ecuación de equilibrio hidrostático como

$$\frac{dP}{dr} = -rg\,.$$

Evidentemente, la fuerza de la gravedad es un parámetro básico de la atmósfera.
En el caso idealizado de una atmósfera isotermo (temperatura constante) y suponiendo un gas ideal para la ecuación de estado, se puede integrar lo anterior para obtener

$$P = P_0 e^{-\mu m_H g h/kT} \quad \text{e igualmente} \quad \rho = \rho_0 e^{-\mu m_H g h/kT} \,,$$

donde P_0 y ρ_0 son la presión y densidad, respectivamente, a la altura $h = 0$.
Usualmente, definimos la escala de presión/densidad de la atmósfera como

$$H = \frac{kT}{\mu m_H g} \,.$$

También, en el caso no isotérmico se define una escala similar

$$H = -P\left(\frac{dP}{dh}\right)^{-1} = -\frac{dh}{d\ln P} \,.$$

Más generalmente, podemos considerar sistemas que no son esféricamente simétricas, como son estrellas en rotación o en sistemas binarios. Si representamos el potencial gravitatorio con ϕ el campo gravitacional es $g = -\nabla\phi$ y ∇P es el gradiente de la presión.
Entonces, la ecuación de equilibrio estático se puede escribir

$$\nabla P = -\rho\nabla\phi \,, \tag{8}$$

donde ρ es la densidad. Dado que el gradiente en presión es paralelo al gradiente del potencial gravitatorio, la presión es constante sobre superficies equipotenciales, lo que permite expresar

$$P = P(\phi) \quad \text{y} \quad \nabla P = \frac{dP}{d\phi}\nabla\phi \,.$$

Comparando este resultado con (8), vemos que la densidad es

$$\rho = -\frac{dP}{d\phi} \,.$$

Si P es función de ϕ, lo es también la densidad, ρ. Si la presión y la densidad son suficientes para definir la temperatura a través la ecuación de estado, la temperatura es, a su vez, función de ϕ. En este caso, tenemos el teorema de Von Zeipel, que el estado físico del material es constante sobre superficies equipotenciales.
Más tarde, veremos que el flujo de radiación es proporcional al gradiente de temperatura. En ese caso, deducimos que una estrella en rotación es más brillante hacia los polos que el ecuador.

Modelos sencillos de estrellas

Como queda actualmente, no podemos integrar la ecuación de equilibrio hidrostático por falta de información adicional, sobre la generación y el transporte de la energía. Sin embargo, podemos considerar dos modelos sencillos instructivos:

En primer lugar, consideramos un modelo donde la densidad, ρ, varía linealmente al interior de la estrella

$$\rho = \rho_c\left(1 - \frac{r}{R}\right) \,,$$

donde ρ_c es la densidad central, r el radio y R el radio total.

En el segundo caso, consideramos un modelo donde la presión y densidad están relacionadas por una ecuación politrópico

$$P = K\rho^\gamma \,,$$

donde K y γ son constantes que no dependen del radio.

Modelo lineal:

La ecuación de equilibrio hidrostático implica

$$\frac{\partial P}{\partial r} = -\frac{m(r)G}{r^2}\rho_c\left(1-\frac{r}{R}\right) ,$$

lo cual requiere determinar $m(r)$ para su integración. Para este fin,

$$\frac{dm}{dr} = 4\pi r^2\rho_c\left(1-\frac{r}{R}\right) = 4\pi\rho_c\left(r^2-\frac{r^3}{R}\right)$$

que podemos integrar para obtener

$$m(r) = \pi\rho_c\left(\frac{4}{3}r^3-\frac{r^4}{R}\right)$$

y la masa total de la estrella es

$$M = m(R) = \pi\rho_c\left(\frac{4}{3}R^3-\frac{R^4}{R}\right)\rho_c = \frac{\pi}{3}\rho_c R^3 .$$

Usando este último resultado para eliminar la densidad central, encontramos

$$\rho_c = \frac{3M}{\pi R^3} \quad \text{y} \quad m(r) = M\left(\frac{4r^3}{R^3}-\frac{3r^4}{R^4}\right).$$

Finalmente, regresamos a la ecuación de equilibrio hidrostático

$$\frac{\partial P}{\partial r} = \frac{\pi G}{r^2}\rho_c\left(1-\frac{r}{R}\right)\left(\frac{4r^3}{R^3}-\frac{3r^4}{R^4}\right) = -\pi G\rho_c^2\left(\frac{4}{3}r-\frac{7}{3}\frac{r^2}{R}+\frac{r^3}{R^2}\right)$$

que nos permite derivar

$$P(r) = P_c - \frac{5}{36}\pi G\rho_c^2\left(\frac{2}{3}r^2-\frac{7}{9}\frac{r^3}{R}+\frac{1}{4}\frac{r^4}{R^2}\right) ,$$

donde P_c es la presión central. En la superficie de la estrella, $(r = R)$ y

$$P(R) = P_c - \frac{5}{36}\pi G\rho_c^2 R^2 = 0$$

por "definición". Por lo tanto, la presión central es de

$$P_c = \frac{5}{36}\pi G\rho_c^2 R^2 \quad \text{o} \quad P_c = \frac{5}{36}\pi G\frac{9M^2}{\pi^2 R^6}R^2 = \frac{5}{4\pi}\frac{M^2 G}{R^4} ,$$

lo que nos permite finalmente encontrar

$$P(r) = \frac{5}{36}G\rho_c^2 R^2\left(1-\frac{24}{5}\frac{r^2}{R^2}+\frac{28}{5}\frac{r^3}{R^3}-\frac{9}{5}\frac{r^4}{R^4}\right)$$

para la presión como función del radio.

Si ignoramos la presión debido a la radiación y suponemos un gas ideal,

$$T(r) = \frac{\mu m_H P(r)}{k\rho(r)} = \frac{5}{36}G\rho_c^2 R^2\left(1+\frac{r}{R}-\frac{19}{5}\frac{r^2}{R^2}+\frac{9}{5}\frac{r^3}{R^3}\right).$$

Modelo politrópico:

Para el caso de un polítropo, conviene eliminar la masa, m, como variable en la ecuación de equilibrio hidrostático

$$m(r) = -\frac{r^2}{\rho(r)G}\frac{\partial P}{\partial r} ,$$

donde r es el radio, ρ la densidad y P la presión como usual.

Con esto, la ecuación de conservación de masa resulta

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(\frac{r^2}{\rho(r)}\frac{\partial P}{\partial r}\right) = -4\pi G\rho(r) \tag{8.5}$$

Si sustituimos la ecuación de un polítropo, $P = K\rho^\gamma$, obtenemos una ecuación diferencial de segundo orden con respecto a la densidad

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(\frac{r^2 K}{\rho(r)}\gamma\rho^{\gamma-1}\frac{\partial \rho}{\partial r}\right) = -4\pi G\rho(r)\ , \tag{9}$$

lo cual requiere condiciones de frontera $\rho = \rho_c$ en el centro, $r = 0$, y $\rho = 0$ en la superficie, $r = R$.

Integramos para obtener la masa total de la estrella en función de ρ_c o vice versa.

Se puede simplificar la matemática, con un cambio de variables

$$\rho = \lambda\theta^n\ ,$$

donde λ es un factor de escala. Si notamos que $\gamma - 1 = 1/n$,
la ecuación (9) resulta

$$\left(\frac{n+1}{4\pi G}K\lambda^{1/(n-1)}\right)\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{\partial\theta}{\partial r}\right) = -\theta^n\ . \tag{10}$$

Si definimos

$$\alpha = \sqrt{\frac{n+1}{4\pi G}K\lambda^{1/(n-1)}}\ ,$$

α tiene la dimensión distancia si λ tiene la dimensión de densidad, lo cual implica que θ no tiene unidades.

Con este sistema de variables, podemos definir el variable, ξ, que también no tiene dimensión según $r = \alpha\xi$, lo cual nos permite escribir la ecuación (10) como

$$\frac{1}{\xi^2}\frac{d}{d\xi}\left(\xi^2\frac{\partial\theta}{\partial\xi}\right) = -\theta^n\ . \tag{11}$$

La ecuación (11) se conoce como la ecuación de Lane-Emden de índice n. La forma anterior no es única.

Es necesario formular las condiciones de frontera en términos de los variables ξ y θ. En el centro, $\theta = \theta_c$. Dado que $\rho_c = \lambda\theta_c^n$, es conveniente adoptar $\lambda = \rho_c$, lo cual implica $\theta_c = 1$ en el centro, $\xi = 0$.

Para la otra condición de frontera, notamos que

$$\frac{dP}{dr} \propto \frac{d\theta}{d\xi} \quad \text{y que} \quad \frac{dP}{dr} = 0 \quad \text{para} \quad r = 0$$

en equilibrio hidrostático. Entonces, deducimos que también

$$\frac{d\theta}{d\xi} = 0$$

en el centro de la estrella.

Con estas condiciones de frontera, es factible integrar la ecuación Lane-Emden (11). Generalmente, es necesario integrarla numéricamente para valores arbitrarios del índice n.

Por otra parte, soluciones analíticas existen para $n = 0, 1$ y 5:

$$n = 0 \quad \theta_0 = 1 - \frac{\xi^2}{6}$$
$$n = 1 \quad \theta_1 = \frac{\sin \xi}{\xi}$$
$$n = 5 \quad \theta_5 = \sqrt{1 + \frac{\xi^2}{3}}$$

Las soluciones para $n = 0$ y 1 llegan a cero en un punto, es decir la densidad tiene un valor de cero, y el valor de ξ en este punto, normalmente indicado como ξ_1, puede interpretarse como el radio de la estrella:

$$n = 0 \quad \xi_1 = \sqrt{6}$$
$$n = 1 \quad \xi_1 = \pi$$

En el caso de $n = 5$, $\theta(\xi) \neq 0$ para ningún valor de ξ, lo cual implica que la estrella se extiende al infinito.

En general, se integra numéricamente la ecuación Lane-Emden del centro hasta el primer cero, el intervalo "físico" correspondiendo a la estrella. De la solución numérica, se puede determinar las propiedades globales de la estrella, como su masa, radio, presión y temperatura central, etc..

Algunos resultados:

$$R = \alpha\xi_1 = \sqrt{\frac{(n+1)K}{4\pi G}}\rho_c^{(1-n)/2n}\xi_1$$
$$M = 4\pi\left(\frac{(n+1)K}{4\pi G}\right)^{3/2}\rho_c^{(3-n)/2n}\left(-\xi^2\frac{d\theta}{d\xi}\right)_{\xi=\xi_1}$$
$$P_c = \frac{M^2 G}{R^4}\left[4\pi(n+1)\left(\frac{d\theta}{d\xi}\right)^2_{\xi=\xi_1}\right]^{-1}$$
$$\Omega = -\frac{3}{5-n}\frac{M^2 G}{R}$$

Los valores de

$$\xi_1 \quad \text{y} \quad \left(\frac{d\theta}{d\xi}\right)_{\xi=\xi_1}$$

están tabulados para varios valores de *n*.

Notar que la energía potencial gravitatoria es positiva para

$$n > 5 \quad \text{o} \quad \gamma < \frac{6}{5}\,.$$

Por lo tanto, un polítropo con índice mayor a 5 no puede representar una estrella real, porque no representaría una estrella ligada.

En el caso de $n = 0$, la estrella tiene densidad constante. Para $n = 1$, el radio es independiente de la densidad central. Cuando $n = 3$, la masa total es independiente de la densidad central.

Dada la solución $\theta_n(\xi)$, la variación de la densidad y presión es

$$\rho = \rho_c\theta^n(\xi) \quad \text{y} \quad P = P_c\theta^{n+1}(\xi)\,.$$

Si se trata de un gas ideal, la variación de la temperatura es entonces

$$T = T_c\theta(\xi)\,.$$

En el caso de $n = 3$, el modelo estándar de Eddington, si consideramos soporte tanto de la radiación, P_R, como del gas, P_g,

$$P_R = \frac{1}{3}aT^4 = (1-\beta)P \tag{12}$$

donde P es la presión total y

$$\beta P = P_g = \frac{\rho kT}{\mu m_H} \tag{13}$$

para un gas ideal.

Usando las ecuaciones (12) y (13) para eliminar la temperatura, obtenemos

$$P = \left(\frac{k}{\mu m_H}\right)^{4/3}\left(\frac{3(1-\beta)}{a\beta^4}\right)^{1/3}\rho^{4/3}$$

que es un polítropo con $\gamma = 4/3$, es decir, una estrella de gas relativista.

Los modelos politrópicos que son físicamente realistas son para $n = 3/2$ y $n = 3$.

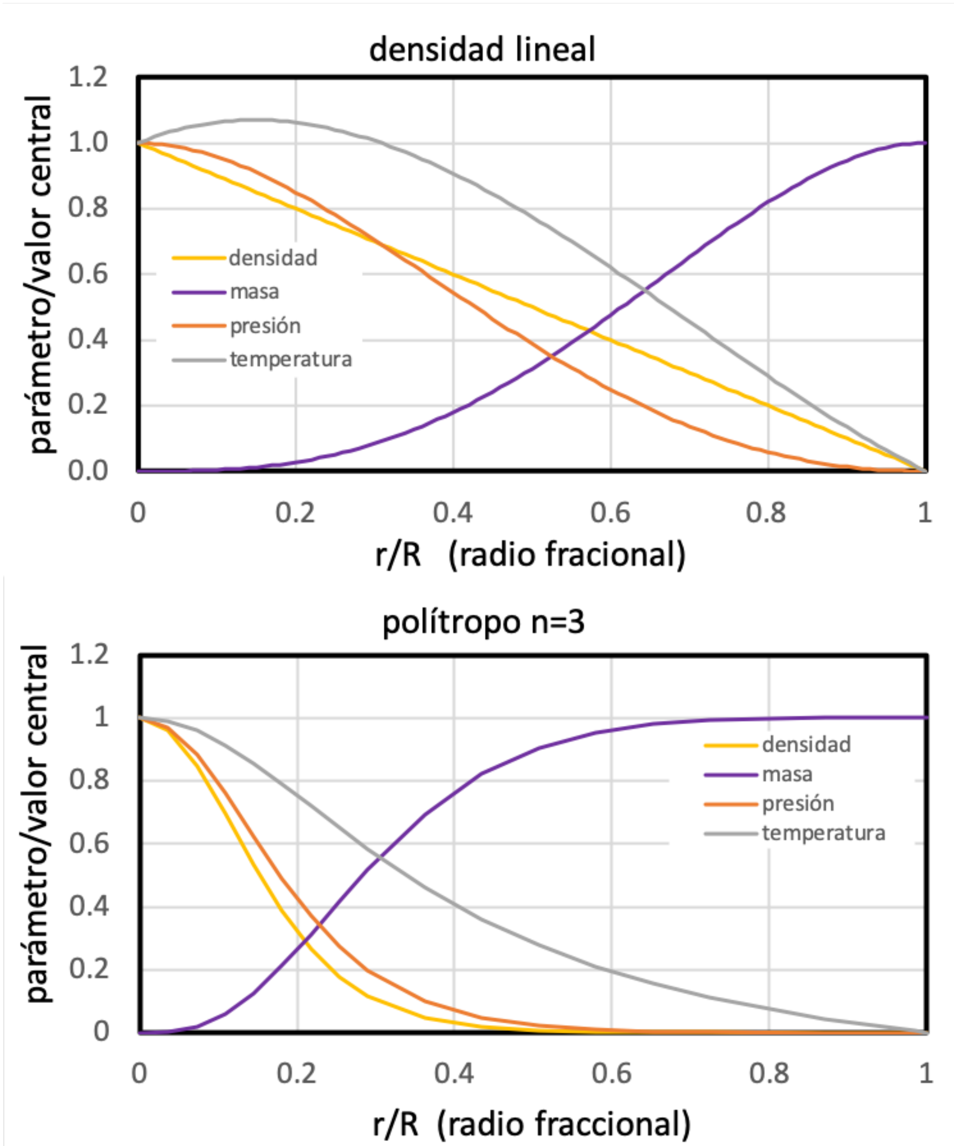

Figure 1: Comparamos la variación de la densidad, presión, temperatura y masa en función del radio en los dos modelos sencillos. En el cuadro superior, se trata del modelo con la densidad que varía linealmente en función del radio. En el cuadro inferior, se trata del modelo politrópico con índice $n = 3$*. Este segundo modelo es mucho más cercano a la estructura real de las estrellas como el Sol de la secuencia principal. Estrellas reales son centralmente concentradas, con la gran mayoría de la masa dentro de la mitad del radio. La variación de la temperatura es casi lineal en función del radio.*